Combining regular solutions of the Schaefer -Ignaczak thermodynamical behaviors relating to the first plane state of elastic strain of the micropolar body subjected to temperature field

Mountajab Al-Hasan

Department of Mathematics, AL Baath University, Homs, Syria
Email: alhasanmountajab@gmail.com

Abstract
The importance of results of this paper consist in supplying new analytical method for solving the Ignaczak tensorial equations, governing the thermodynamical plane state of small elastic strains of the homogeneous, isotropic, micropolar elastic solid of 5 material constants of Eringen-Nowacki type, which shortly called 2D (E-N:5) (Iron plates, copper plates, aluminum plates, .. etc.). The paper covers the mathematical model of the first plane state of small elastic strains of micropolar homogeneous and isotropic solid, of five material constants, subjected to temperature field, mathematically proposed by Eringen and Nowacki, and shortly called 2D (E-N:5). In paper, for the 2D (E-N:5) considerable body, we generalize the Schaefer vector method to:
I) The Traditional Description of the 2D (E-N:5) considerable body,
II) The Ignaczak Description of the 2D (E-N:5) considerable body.
Subsequently, these results have important applications in material resistance, plate theory, industry ….etc.

Keywords: The superposition Method -The Hooke and Complementary Thermodynamical processes of Ignaczak Type – The Micropolar Elastic Solid 2D (E-N:5) subjected to temperature field- The first Plane State of Elastic Strain .

تركيب الحلول النظامية لسلوك Schaefer - Ignaczak الترموديناميكي لأجل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب والخاضع لحرارة

أ. د. منتجب الحسن
أستاذ في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.
Department of Mathematics, AL Baath University,Homs, Syria,

E-mail: alhasanmountajab@gmail.com

الملخص(Abstract) :
تكمن أهميته البحث بأنه يزودنا بطريقة تحليلية جديدة لحل معادلات Ignaczak التنسورية التي تصف الحالة الترموديناميكية المستوية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب والمتجانس والمتماثل المناحي المعيَّن بـ 5 ثوابت مادية، من نوع Eringen-Nowacki ، والذي نرمز له اختصاراً بالرمز: (2D (E-N:5 (الصفائح: الحديدية، النحاسية، الألمنيوم، الفولاذ، ... الخ)،
ويتعلق بالنموذج الرياضي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمتجانس، والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، والمعين بـ 5 ثوابت مادية، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين Eringen و Nowacki ، والذي يرمز له اختصاراً بـ (2D (E-N:5.
نقدم في هذا البحث تعميماً لطريقة متجه Schaefer المتجهية، لتشمل:

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

I) الوصف التقليد للجسم المعتبر،
II) وصف Ignaczak للجسم المعتبر.
وبالتالي يمكن أن تملك نتائج هذا البحث أهمية كبيرة في مقاومة المواد في مخبر المواد و في التصفيح والتسليح، ... الخ.

الكلمات المفتاحية (Key Words) : طريقة التراكيب- العمليتان الترموديناميكيتان النظاميتان الهوكية والمتممة - معادلات الحركة بالإجهادات والحرارة من نمط Ignaczak - الجسم المرن دقيق الاستقطاب (E-N:5) 2D - الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

المقدمة(Introduction):

استُخدمت طريقة متجه Schaefer، لحل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم (E-N:5) و ذلك انطلاقاً من متجه Schaefer : $\left(0,0,\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}\right)\equiv\zeta$، $(\alpha,\beta=1,2\ )$، علما أن: $\in_{\alpha\beta}$ هو شبه تنسور Levi-Civita النسبي بالوزن $\frac{1}{2}$ على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2 [5].

بنفس الطريقة تم حل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame للحالة ثنائية البعد المتناظرة محورياً للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:5) [5,6] ، و أشار نفس الباحثين إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، (مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:6) بوجود حقل درجات حرارة، و حقل لدونة [6]).

أيضاً قام الباحث Dyszlewicz باستخدام طريقة متجه Schaefer في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات Lame للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم من نوع (E-N:5) بما يتوافق مع الحالة الترموديناميكية غير متساوية الحرارة لهذا الجسم. وفي عام 1963 وضع الباحث البولندي Ignaczak وصفاً جديداً لجسم Hooke الصلب المرن من خلال معادلة تنسورية واحدة بالإجهادات مزودة بشروط حدية وشروط ابتدائية ومصاغة بطريقة معينة. وقام نفس الباحث عام 1971 بتعميم الوصف السابق إلى جسم صلب مرن أكثر تعقيداً[9].

في الأعوام: 1991 و 2001 و 2004 و 2014 قام الباحثان Al-Hasan و Dyszlewicz بتعميم ذلك إلى الجسم الصلب المرن من نوع (E-N) (اختصار لـ: Eringen-Nowacki)، الخاضع لحمول ترموميكانيكية، لأجل الحالة الفراغية والحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة [1,5].

المناقشة(Discussion) : انطلاقا من نتائج البحثين [5,6] المتمثلة بطريقة متجه Schaefer في حل مسألة Lame للجسم (E-N:5) 2D الخاضع لحرارة ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية R^2، سنقوم بتعميم طريقة متجه Schaefer إلى مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم (E-N:5) 2D الخاضع لحرارة ويشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2. وباستخدام تعميم الأسلوب السابق سنقوم باستنتاج طريقة تنسور Schaefer من أجل معادلات Ignaczak بالإجهادات والحرارة والتي تصف الجسم المعتبر(E-N:5) 2D.

فيمايلي نعرض المسألتين اللتين سنناقشهما في البحث [5,1].

مسألتا الوصف التقليدي ووصف Ignaczak للحالة الترموديناميكية للجسم المرن (E-N:5) 2D المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω المحدودة في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2:

نفرض أن كافة الأدلة اللاتينية .... $i\ ,\ j\ ,\ k$, تأخذ القيم $1\,,2\,,3$، وأن كافة الأدلة الإغريقية .... $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, تأخذ القيم $1\,,2$. ونعتمد رموزEinstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3 وفي المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2، لتكن $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة ، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\ \mathbf{e}_1\ ,\ \mathbf{e}_2\ ,\ \mathbf{e}_3)$، من أجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس تكون كافة الحقول التنسورية التي تحكم الحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث x_3، حيث توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعتبر المتجانس والمتماثل المناحي من خلال الحقول التنسورية: $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$ حيث أن $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ حقلان متجهيان مستقلان، هما على الترتيب حقل الإزاحات وحقل التوجهات $\theta:=\mathrm{T}-\mathrm{T}_0$ حقل سلمي يمثل تغير الحرارة ، T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له، و $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa}$ ، حقول تنسورية من المرتبة الثانية هي على الترتيب: حقل إجهادات القوة، حقل إجهادات العزم ، حقل الانفعالات، و حقل الانفعالات دقيقة الاستقطاب.

إذا رمزنا بـــ $\mathrm{T}^+ :=\ ]\ 0\ ,\infty\ [$ ، و بـ $\mathrm{T}:=\ [\ 0\ ,\infty\ [$،شو الفرق بين الرمزين كأنها نفس الشي فيمكن أن تُمثّل الحقول السابقة في $\Omega\ \times\ \mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$ ، على الشكل التالي:

$$\mathbf{u}\equiv(u_1\,,u_2\,,0)\ \ ,\ \ \boldsymbol{\varphi}\equiv(\ 0\ ,\ \ 0\ ,\varphi_3) \tag{3.1}$$

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_{13} \\ 0 & 0 & \kappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

حيث:

$$\sigma_{33} = \nu\, \sigma_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\, \nu_T\, \theta \;,\quad \mu_{3\alpha} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\, \mu_{\alpha 3} \tag{3.4}$$

كما أن: $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ تمثل نسبة Poisson، و $\nu_T = (3\lambda + 2\mu)\, a_t$، و a_t هو معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و $\mu, \lambda, \gamma, \varepsilon \in R_+$ الثوابت مادية للجسم المدروس، أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ وللزمن t.

أولاً: الوصف التقليدي: وهو يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta} + X_\alpha = \rho\, \ddot{u}_\alpha \;, \quad \in_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3,\beta} + Y_3 = J\, \ddot{\varphi}_3 \tag{3.5}$$

علماً أن:

$\rho \,, J$: هي على الترتيب الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المعتبر

$\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, 0)$: حقل القوة الحجمية

$\mathbf{Y} \equiv (0, 0, Y_3)$: حقل العزم الحجمي

نرمز بواسطة الفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة للموضع: $f_{,\beta} = \dfrac{\partial f}{\partial x_\beta}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$.

الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتنسور Levi-Civita النسبي من المرتبة الثانية مع الوزن: $w = \dfrac{1}{2}$.

معادلات انسجام الانفعالات المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} = 0 \,,\; \kappa_{13} - \gamma_{21,1} + \gamma_{11,2} = 0 \,, \\ &\kappa_{23} + \gamma_{12,2} - \gamma_{22,1} = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3 \quad , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \tag{3.7}$$

العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\,\gamma_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\,\gamma_{\beta\alpha} + (\lambda e_1 - \nu_T\, \theta)\,\delta_{\alpha\beta} \;, \\ &\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\,\kappa_{\alpha 3} \end{aligned} \tag{3.8}$$

حيث $\alpha \in R_+$ الثابت المادي الخامس للجسم و $e_1 = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}$ أما $\delta_{\alpha\beta}$ فهو رمز دلتا كرونيكا،

معادلات الحرارة والانفعال المحققة في $\Omega \times T^+$:

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\theta_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{e}_1 = -\frac{Q}{\kappa} \tag{3.9}$$

حيث :
$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}\ ,\ \ \kappa = \frac{\lambda_0}{c_{\varepsilon}}\ \ ,\ \eta_0 = \frac{\nu_T T_0}{\lambda_0}$$

مع العلم أن Q يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر و W كمية الحرارة المشكّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن λ_0 معامل التوصيل الحراري c_{ε} تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن: $\dot{e}_1 = \dot{\gamma}_{\varepsilon\varepsilon}$ ،

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_\beta = p_\alpha\ ,\ \mu_{\beta 3} n_\beta = m_3\ \ ,\ \ \theta = \vartheta \tag{3.10}$$

حيث التوابع $[\,(p_\alpha, m_3, \vartheta) : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to R\,]$ مفروضة و $\partial\,\Omega$ تمثل الحدود الملساء للمنطقة Ω $(\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\,\Omega)$

أما: $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, 0)$ فهي المركبات الديكارتية لمتجه واحدة ناظم $\partial\,\Omega$ والموجه نحو خارج Ω.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha\ ,\ \varphi_3 = f_3\ ,\ \theta = \ell\ ,\ \dot{u}_\alpha = g_\alpha\ ,\ \dot{\varphi}_3 = g_3 \tag{3.11}$$

حيث التوابع $[\,(f_\alpha, f_3, \ell, g_\alpha, g_3) : \Omega \to R\,]$ مفروضة.

ثانياً: وصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة للجسم (E-N:5) 2D: وهو يتألف من المعادلات والعلاقات التنسورية الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [1]:

معادلات الحركة بالإجهادات والحرارة، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\begin{aligned} &\rho^{-1} R_{\alpha,\beta} + J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_3 - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \\ &\qquad + \frac{1}{2\mu}(\lambda \ddot{e}_1 - \nu_T \ddot{\theta})\,\delta_{\alpha\beta} = 0\ , \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$c_4^2 R_{3,\alpha} - \ddot{\mu}_{\alpha 3} = 0\ , \tag{3.13}$$

$$\theta_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{e}_1 = -\frac{Q}{\kappa} \tag{3.14}$$

حيث:

$$R_\alpha = \hat{R}_\alpha + X_\alpha\ , R_3 = \hat{R}_3 + Y_3\ , \hat{R}_\alpha = \sigma_{\beta\alpha,\beta}\ , \hat{R}_3 = \in_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3,\beta}\ ,$$

$$\dot{e}_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\dot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T \dot{\theta})\ , \ddot{e}_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\ddot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T \ddot{\theta})\ , c_4 = \sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}}\ ,$$

أخيراً $\sigma_{(\alpha\beta)}$ و $\sigma_{[\alpha\beta]}$ ،على الترتيب، هي الجزء التناظري والجزء التناظري العكسي لــ $\sigma_{\alpha\beta}$ ؛

$$\sigma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha})\ \ ,\ \ \sigma_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\beta\alpha})\ ؛$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_\beta = p_\alpha\ ,\ \mu_{\beta 3} n_\beta = m_3\ \ ,\ \ \theta = \vartheta \tag{3.15}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\ ,\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{(0)}\ ,\ \theta = \ell\ , \\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\ ,\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

حيث:

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(0)} & \sigma_{12}^{(0)} & 0 \\ \sigma_{21}^{(0)} & \sigma_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{(0)} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{\mu}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13}^{(0)} \\ 0 & 0 & \mu_{23}^{(0)} \\ \mu_{31}^{(0)} & \mu_{32}^{(0)} & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \dot\sigma_{11}^{(0)} & \dot\sigma_{12}^{(0)} & 0 \\ \dot\sigma_{21}^{(0)} & \dot\sigma_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \dot\sigma_{33}^{(0)} \end{bmatrix} , \quad \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot\mu_{13}^{(0)} \\ 0 & 0 & \dot\mu_{23}^{(0)} \\ \dot\mu_{31}^{(0)} & \dot\mu_{32}^{(0)} & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.18}$$

علماً أن:

$$\sigma_{33}^{(0)} = \nu\,\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\,\nu_T\,\ell\,, \quad \mu_{3\alpha}^{(0)} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha 3}^{(0)} \;, \tag{3.19}$$

$$\dot\sigma_{33}^{(0)} = \nu\,\dot\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\nu_T\,[\kappa\ell_{,\alpha\alpha} + Q^{(0)} - \kappa\eta_0\dot e_1^{(0)}],\ \dot\mu_{3\alpha}^{(0)} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\dot\mu_{\alpha 3}^{(0)} \tag{3.20}$$

وأن:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} &= (\mu+\alpha)\,\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} + (\mu-\alpha)\,\gamma_{\beta\alpha}^{(0)} + [\lambda\,e_1^{(0)} - \nu_T\,\ell\,]\,\delta_{\alpha\beta}\;, \\ \mu_{\alpha 3}^{(0)} &= (\gamma+\varepsilon)\,f_{3,\alpha}\;,\ \gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = f_{\beta,\alpha} - \in_{\alpha\beta} f_3\;,\ e_1^{(0)} = f_{\varepsilon,\varepsilon}\;, \end{aligned} \tag{3.21}$$

وأن:

$$\begin{aligned} \dot\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} &= (\mu+\alpha)\,\dot\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} + (\mu-\alpha)\,\dot\gamma_{\beta\alpha}^{(0)} + \\ &+\{(\lambda + \nu_T\,\kappa\eta_0)\dot e_1^{(0)} - \nu_T\,[\kappa\ell_{,\alpha\alpha} + Q^{(0)}]\,\}\,\delta_{\alpha\beta}\;, \\ \dot\mu_{\alpha 3}^{(0)} &= (\gamma+\varepsilon)\,g_{3,\alpha}\;,\ \dot\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = g_{\beta,\alpha} - \in_{\alpha\beta} g_3\;,\ \dot e_1^{(0)} = g_{\varepsilon,\varepsilon}\,, \end{aligned} \tag{3.22}$$

أخيراً: $Q^{(0)}$ تمثل القيمة الابتدائية للمصادر الحرارية ؛

العلاقات التأسيسية العكسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2\mu}(\,\lambda\,e_1 - \nu_T\,\theta\,)\,\delta_{\alpha\beta}\;, \\ \kappa_{\alpha 3} &= \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha 3}\;,\quad e_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\,\theta)\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

العلاقات التي الإزاحات والدورانات بدلالة الإجهادات ، والمحققة في $\bar\Omega \times T$:

$$u_\alpha = g_\alpha\,t + f_\alpha + \rho^{-1}(\,t * R_\alpha\,)\;, \tag{3.24}$$

$$\varphi_3 = g_3\,t + f_3 + J^{-1}(\,t * R_3\,)\;, \tag{3.25}$$

حيث النجمة $*$ تعني الطي [10]: $t * f\,(\mathbf{x};t\,) = \int_0^t (t-\tau\,)\,f\,(\mathbf{x};\tau\,)\,d\tau$

في هذا البحث قمنا بمايلي:

في كلٍ من الوصف التقليدي (3.11) -(3.1)، و وصف Ignaczak (3.12)-(3.25) للجسم المعتبر 2D (E-N:5) ، سنفرض فيه أن:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'\;,\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}'\;,\ \theta = \theta^0 + \theta'\;, \\ &\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}'\;,\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}'\;,\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}'\;, \\ &\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}'\;,\ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}'\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

حيث الحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ و $\mathbf{Y}^0$ ، تتعلّق بالمرونة الخطية الحرارية، الكلاسيكية والديناميكية المترابطة (موديل Hooke) ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم، أما الحقول $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ و $\mathbf{Y}'$ فهي الحقول المتممة، أو الزائدة عن حقول الجسم Hooke.

-1 تعميم طريقة متجه Schaefer إلى حل مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم 2D (E-N:5):

A. مسألة القيم الحدية والابتدائية المتعلقة بالحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل عليها باتباع ما يلي.

من المعادلتين $(3.5)_1$ و(3.9)، نحصل على:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma^0_{\beta\alpha,\beta} + X_\alpha = \rho\,\ddot{u}^0_\alpha\ , \qquad (3.27)$$

معادلة الحرارة والانفعال، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\theta^0_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta}^0 - \eta_0 \dot{e}^0_1 = -\frac{Q}{\kappa}\ , \qquad (3.28)_1$$

حيث : $\dot{e}^0_1 = \dot{\varepsilon}^0_{\alpha\alpha} = \dot{u}^0_{\alpha,\alpha}$ ،

التي تكتب بالشكل المبسط التالي:

$$D\,\theta^0 - \eta_0 \dot{e}^0_1 = -\frac{Q}{\kappa}\ , \qquad (3.28)_2$$

حيث: $D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa}\partial_t$ و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد: ($\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$) ،

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\kappa^0_{23,1} - \kappa^0_{13,2} = 0\ ,\quad \kappa^0_{13} - \varepsilon^0_{21,1} + \varepsilon^0_{11,2} = 0\ ,\quad \kappa^0_{23} + \varepsilon^0_{12,2} - \varepsilon^0_{22,1} = 0\ , \qquad (3.29)_1$$

التي إذا حذفنا منها انفعالات العزم ، الكلاسيكية ، فإننا نحصل فقط على معادلة واحدة؛ هي:

معادلة توافق الانفعالات التقليدية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\varepsilon^0_{11,22} + \varepsilon^0_{22,111} - 2\,\varepsilon^0_{12,12} = 0\ , \qquad (3.29)_2$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta} = u^0_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha}\varphi^0_3\ ,\quad \kappa^0_{\alpha 3} = \varphi^0_{3,\alpha} \qquad (3.30)_1$$

التي اعتمادا على تعريف الدوران الكلاسيكي ($\varphi^0_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha}$) ، وبمساعدة العلاقة:

$$\in_{\alpha\gamma}\in_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\varepsilon} \qquad (3.30)_2$$

فإن العلاقة الأولى منها (أي من $(3.30)_1$) تعطينا:

العلاقات الهندسية الكلاسيكية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u^0_{\alpha,\beta} + u^0_{\beta,\alpha})\ , \qquad (3.30)_3$$

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

وهنا يتضح تناظر حقل الانفعالات التنسوري، الكلاسيكي ($\varepsilon^0_{\alpha\beta}=\varepsilon^0_{\beta\alpha}$)،

من العلاقات التأسيسية(3.8)، نحصل على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\sigma^0_{\alpha\beta}=(\mu+\alpha)\,\varepsilon^0_{\alpha\beta}+(\mu-\alpha)\,\varepsilon^0_{\beta\alpha}+[\lambda e^0_1-\nu_T\,\theta^0]\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\qquad \mu^0_{\alpha3}=(\gamma+\varepsilon)\,\kappa^0_{\alpha3}\qquad (3.31)_1$$

حيث: $e^0_1=\varepsilon^0_{\alpha\alpha}$ ،

وكون أن تنسور الانفعالات الكلاسيكية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ متناظر ، فإن العلاقة الأولى من العلاقات السابقة تعطينا:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\sigma^0_{\alpha\beta}=2\mu\,\varepsilon^0_{\alpha\beta}+[\lambda e^0_1-\nu_T\,\theta^0]\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\qquad (3.31)_2$$

حيث: $e^0_1=\varepsilon^0_{\alpha\alpha}$ ،

من الشروط الحدية (3.10)، نحصل على:

الشروط الحدية الكلاسيكية المحققة على $\partial\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\sigma^{\,0}_{\beta\,\alpha}n_\beta=p_\alpha\ \ ,\ \ \theta^0=\vartheta\qquad (3.32)$$

ومن الشروط الابتدائية (3.11) ، نحصل على:

الشروط الابتدائية الكلاسيكية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u^0_\alpha=f_\alpha\ ,\ \ \theta^0=\ell\ ,\ \ \dot u^0_\alpha=g_\alpha\qquad (3.33)$$

تمثل المسألة (3.27)-(3.33) بالمسألة الكلاسيكية للجسم (E-N:5) 2D.

B. مسألة القيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة $(\mathbf{u}',\varphi',\theta',\sigma',\mu',\gamma',\kappa')$ (الزائدة):

نحصل عليها باتباع ما يلي.

بدايةً تلزمنا المعادلة المساعدة التالية:

$$\overset{*}{\square}_2\,\mu^0_{\alpha3,\alpha}+\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=J\,\overset{*}{\square}_2\,\ddot\varphi^0_3\qquad (3.34)$$

حيث: $\square_2=(\mu+\alpha)\Delta_1-\rho\,\partial^2_t$ و $\square_4=(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_1-4\alpha-J\partial^2_t$ ، أما $\overset{*}{\square}_2$ و $\overset{*}{\square}_4$ ، فهما على الترتيب: $\square_2$ و $\square_4$ بعد تعويض $\alpha=0$.

إن (3.34) محققة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$. بسهولة يمكن ملاحظة أن هذه المعادلة تنتج عن المعادلة [5]:

$$2\overset{*}{\square}_2\,\varphi^0_3+\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=0$$

وعن العلاقة الهندسية الثانية في $(3.30)_1$ وعن العلاقة التأسيسية الثانية في $(3.31)_1$.

للحصول، الآن، على المعادلات للحقول المتممة $(\mathbf{u}',\varphi',\theta',\sigma',\mu',\gamma',\kappa')$ (الزائدة) نتبع الآتي . تطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة $(3.5)_2$ فنحصل بذلك على المعادلة التالية (في: $\Omega\times\mathrm{T}^+$):

$$\overset{*}{\square}_2(\in_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}+\mu_{\beta3,\beta})+\hat Y_3+\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=J\,\overset{*}{\square}_2\ddot\varphi_3\qquad (3.35)$$

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

حيث:
$$\hat{Y}_3 = \overset{*}{\square}_2 Y_3 - \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}$$

ينتج الآن عن (3.35) و(3.34) وعن المعادلتين $(3.5)_1$ و(3.9) ، أن مجموعة الحقول المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ يحقق نظام المعادلات، المتمم (الزائد)، التالي في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned} &\sigma'_{\beta\alpha,\beta} + \hat{X}_\alpha = \rho\, \ddot{u}'_\alpha , \\ &\overset{*}{\square}_2 (\in_{\alpha\beta}\sigma'_{\alpha\beta} + \mu'_{\beta 3,\beta}) + \hat{Y}_3 = J\, \overset{*}{\square}_2 \ddot{\varphi}'_3 , \\ &D\theta' - \eta_0 \dot{e}'_1 = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} , \end{aligned} \tag{3.36}$$

حيث: $\dot{e}'_1 = \gamma'_{\alpha\alpha} = u'_{\alpha,\alpha}$ ،

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على:

معادلات توافق الانفعالات، المتممة، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\kappa'_{23,1} - \kappa'_{13,2} = 0 , \quad \kappa'_{13} - \gamma'_{21,1} + \gamma'_{11,2} = 0 , \\ &\kappa'_{23} + \gamma'_{12,2} - \gamma'_{22,1} = 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على:

العلاقات الهندسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = u'_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi'_3 \quad , \quad \kappa'_{\alpha 3} = \varphi'_{3,\alpha} \tag{3.38}$$

ومن العلاقات التأسيسية (3.8)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma'_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\gamma'_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\gamma'_{\beta\alpha} + (\lambda e'_1 - \nu_T\, \theta')\,\delta_{\alpha\beta} , \\ &\mu'_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\kappa'_{\alpha 3} \end{aligned} \tag{3.39}$$

حيث: $e'_1 = \gamma'_{\varepsilon\varepsilon}$ ،

إلى معادلات الحقل والعلاقات (3.36) -(3.39) نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التالية:

الشروط الحدية، المتممة (على $\partial\Omega \times T$ *)*:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0 \quad , \quad \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \quad , \quad \theta' = 0 \tag{3.40}$$

الشروط الابتدائية، المتممة، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u'_\alpha = 0 , \quad \varphi'_3 = f_3 - f_3^0 , \quad \theta' = 0 , \quad \dot{u}'_\alpha = 0 , \quad \dot{\varphi}'_3 = g_3 - g_3^0 \tag{3.41}$$

حيث المقادير: m_3^0 *و* f_3^0 *و* g_3^0 *تنتج عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (3.33)-(3.27) وعن العلاقات التقليدية ، وعن العلاقات:*

$$f_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \varphi_3^0(\mathbf{x},t) , \quad g_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial t}(\mathbf{x},t) \,;\; \mathbf{x} \in \Omega$$

تمثل المسألة (3.41)-(3.36) بالمسألة المتممة (الزائدة) للجسم (E-N:5) 2D.

بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (3.33)-(3.27)،نحصل على الحقول الكلاسيكية $(u_\alpha^0, \varphi_3^0, \theta^0, \varepsilon_{\alpha\beta}^0, \sigma_{\alpha\beta}^0)$. بعدها وبمساعدة العلاقات الهندسية التي تربط مابين φ_3^0 و $\kappa_{\alpha 3}^0$ نحصل على $\kappa_{\alpha 3}^0$. بعدها باستخدام العلاقات التأسيسية التي تربط مابين $\kappa_{\alpha 3}^0$ و $\mu_{\alpha 3}^0$ نحصل $\mu_{\alpha 3}^0$.

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة (الزائدة) (3.36)-(3.41) نحصل على الحقول المتممة $(u'_\alpha, \varphi'_3, \theta', \sigma'_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha 3}, \gamma'_{\alpha\beta}, \kappa'_{\alpha 3})$. أخيراً باستخدام العلاقات (3.4) و(3.26)، نحصل على الحل $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية الأصلية (3.11) - (3.1).

2- تعميم طريقة متجه Schaefer إلى وصف Ignaczak للجسم (E- 2D (N:5:

A- مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل على هذه المسألة باتباع ما يلي. بدايةً ، لنسمي:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\alpha,\beta} + R_{\beta,\alpha}) - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\mu}(\lambda\ddot{e}_1 - \nu_T\ddot{\theta})\delta_{\alpha\beta} \qquad (3.42)$$

بحقل Schafer التنسوري، والذي هو حقل تنسوري من المرتبة الثانية، ومتناظر.

لنلاحظ، الآن، أن معادلة Ignaczak التنسورية (3.12) تكتب في $\Omega \times T^+$، بالشكل[1]:

$$\zeta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\alpha,\beta} - R_{\beta,\alpha}) + J^{-1}\in_{\alpha\beta} R_3 = 0 \qquad (3.43)$$

فإذا كتبنا:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta^0_{\alpha\beta} + \zeta'_{\alpha\beta} \qquad (3.44)$$

حيث $\zeta^0_{\alpha\beta}$ هو الجزء الكلاسيكي و $\zeta'_{\alpha\beta}$ الجزء المتمم لحقل Schafer التنسوري $\zeta_{\alpha\beta}$،

نحصل، الآن، على معادلات Ignaczak الكلاسيكية بالتوابع المجهولة الكلاسيكية: $\sigma^0_{\alpha\beta}$ و θ^0، بوضع $\zeta^0_{\alpha\beta} = 0$ في المعادلة (3.42)، وبعزل الجزء الكلاسيكي من المعادلة (3.14)، فنحصل على:

معادلات Ignaczak الكلاسيكيتان، الحركة، والمحققان في $\Omega \times T^+$:

$$\hat{c}_2^2(R^0_{\alpha,\beta} + R^0_{\beta,\alpha}) - \ddot{\sigma}^0_{\alpha\beta} + (\lambda\ddot{e}^0_1 - \nu_T\ddot{\theta}^0)\delta_{\alpha\beta} = 0 \;, \qquad (3.45)$$

$$\theta^0_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta}^0 - \eta_0\dot{e}^0_1 = -\frac{Q}{\kappa} \;, \qquad (3.46)$$

حيث:

$$R^0_\alpha = \hat{R}^0_\alpha + X_\alpha \;,\; \hat{R}^0_\alpha = \sigma^0_{\beta\alpha,\beta} \;,$$

$$\dot{e}^0_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\dot{\sigma}^0_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\dot{\theta}^0) \;,\; \ddot{e}^0_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\ddot{\sigma}^0_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\ddot{\theta}^0) \;,\; \hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

من الشروط الحدية (3.15) ، نحصل على الشروط الحدية التالية، لأجل جملة المعادلتين (3.46) -(3.45):

الشروط الحدية، الكلاسيكية، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma^0_{\beta\alpha}n_\beta = p_\alpha \;,\; \theta^0 = \vartheta \qquad (3.47)$$

ومن الشروط الابتدائية (3.22) -(3.16) ، نحصل على الشروط ، الابتدائية، الكلاسيكية، التالية لأجل حقل الإجهادات الكلاسيكية $\boldsymbol{\sigma}^0$ وحقل درجات الحرارة الكلاسيكي θ^0، المحققين لجملة للمعادلتين (3.46) -(3.45):

[1] إن المعادلة التنسورية (3.12)، تملك الشكل: $L_{\alpha\beta} = 0$، ومن أجل الحصول على المعادلات الكلاسيكية، كتبناها بالشكل: $L_{(\alpha\beta)} + L_{[\alpha\beta]} = 0$ (حيث هنا: $\zeta_{\alpha\beta} = L_{(\alpha\beta)}$)، وذلك بهدف تخصيص الجزء: $L_{(\alpha\beta)} = 0$ ليصف الحقول الكلاسيكية. هذا بدوره ينتج عن حقيقية أن معادلات الإجهادات والحرارة ، الكلاسيكية، لا يتغير طرفها الأيسر باستبدال كل α بـ β وكل β بـ α.

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \operatorname{sym} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \;, \quad \theta^0 = \ell \;, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \operatorname{sym} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} , \tag{3.48}$$

حيث الرمز sym يدل على الجزء التناظري؛ $\operatorname{sym} \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = A_{(i\,j)}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ؛ بالتالي تأخذ الشروط الإبتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\sigma^0_{\alpha\beta} = \sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)} \;, \; \sigma^0_{33} = \sigma^{(0)}_{33} \;, \quad \theta^0 = \ell \;, \\ &\dot{\sigma}^0_{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^{(0)}_{(\alpha\beta)} \;, \; \dot{\sigma}^0_{33} = \dot{\sigma}^{(0)}_{33} \;, \end{aligned} \tag{3.49}$$

حيث هنا:

$$\begin{aligned} &\sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)} = 2\mu\, \varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} + [\lambda e^{(0)}_1 - \nu_T\, \ell]\, \delta_{\alpha\beta} \;, \; \sigma^{(0)}_{33} = \nu\, \sigma^{(0)}_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \nu_T\, \ell \;, \\ &\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(f_{\alpha,\beta} + f_{\beta,\alpha}) \;, \; e^{(0)}_1 = f_{\varepsilon,\varepsilon} \;, \end{aligned} \tag{3.50}$$

و:

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}^{(0)}_{(\alpha\beta)} = 2\mu\, \dot{\varepsilon}^{(0)}_{\alpha\beta} + \{(\lambda + \nu_T\, \kappa\eta_0)\dot{e}^{(0)}_1 - \nu_T\, [\kappa\ell_{,\alpha\alpha} + Q^{(0)}]\}\, \delta_{\alpha\beta} \;, \\ &\dot{\sigma}^{(0)}_{33} = \nu\, \dot{\sigma}^{(0)}_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\nu_T\, [\kappa\ell_{,\alpha\alpha} + Q^{(0)} - \kappa\eta_0 \dot{e}^{(0)}_1] \;, \\ &\dot{\varepsilon}^{(0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha,\beta} + g_{\beta,\alpha}) \;, \; \dot{e}^{(0)}_1 = g_{\varepsilon,\varepsilon} \;, \end{aligned} \tag{3.51}$$

من العلاقات $(3.23)_1$ ، نحصل على:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية محلولةً بالنسبة للانفعالات الكلاسيكية $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ، *المحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$2\mu\, \varepsilon^0_{\alpha\beta} = \sigma^0_{\alpha\beta} - (\lambda e^0_1 - \nu_T\, \theta^0)\, \delta_{\alpha\beta} \;, \tag{3.52}$$

حيث: $e^0_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma^0_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\, \theta^0)$ ،

كما نحصل من العلاقات $(3.23)_2$ ، على العلاقات التأسيسية محلولةً بالنسبة لانفعالات العزم، الكلاسيكية (في $\Omega \times \mathrm{T}$):

$$\kappa^0_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\, \mu^0_{\alpha 3} \;, \tag{3.53}$$

من العلاقات (3.24) ومن تعريف الدوران الكلاسيكي φ^0_3 ($\varphi^0_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha}$)، نجد:

العلاقات التالية التي تعطينا الإزاحة الكلاسيكية $\mathbf{u}^0$ *والدوران الكلاسيكية* $\boldsymbol{\varphi}^0$ *في* $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$*، وفقاً لوصف Ignaczak:*

$$u^0_\alpha = g_\alpha\, t + f_\alpha + \rho^{-1}(t * R^0_\alpha) \;, \tag{3.54}$$

$$\varphi^0_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} [g_\beta\, t + f_\beta + \rho^{-1}(t * R^0_\beta)]_{,\alpha} \tag{3.55}$$

نعيّن انفعالات العزم، الكلاسيكية $\kappa^0_{j\,i}$ *من العلاقة التالية (في :* $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$ *) :*

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\kappa^{0}_{\alpha 3}=\frac{1}{2}\in_{\gamma\varepsilon}[g_{\varepsilon}\,t+f_{\varepsilon}+\rho^{-1}(t*R^{0}_{\varepsilon})]_{,\alpha\gamma} \tag{3.56}$$

معادلات الحركة بالإجهادات والحرارة (3.45)-(3.46) تملك الشكل التكاملي- التفاضلي التالي (في $\Omega\times T$)([2,3]):

$$\begin{aligned}&\hat{c}^{2}_{2}(t*R^{0}_{\alpha,\beta}+t*R^{0}_{\beta,\alpha})-\sigma^{0}_{\alpha\beta}+(\lambda e^{0}_{1}-\nu_{T}\theta^{0})\delta_{\alpha\beta}=\\&\qquad=-\mu[\,(g_{\alpha,\beta}+g_{\beta,\alpha})\,t+(f_{\alpha,\beta}+f_{\beta,\alpha})]\ ,\\&\int_{0}^{t}\theta^{0}_{,\alpha\alpha}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau-\frac{1}{\kappa}\theta^{0}(\mathbf{x},t)-\eta_{0}\,e^{0}_{1}(\mathbf{x},t)\ =\\&\qquad=\ -\frac{1}{\kappa}\,\ell(\mathbf{x})-\eta_{0}\,f_{\varepsilon,\varepsilon}(\mathbf{x})-\frac{1}{\kappa}\int_{0}^{t}Q\,(\mathbf{x},\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{3.57}$$

حيث: $e^{0}_{1}=\dfrac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma^{0}_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_{T}\,\theta^{0})$.

بسهولة يمكن التأكد من أن المعادلات السابقة (3.57) تكافئ مسألة القيم الابتدائية (3.45)-(3.46) و(3.48).

بهدف إيجاد معادلات الحقول الزائدة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\theta',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\gamma',\boldsymbol{\kappa}')$ تلزمنا المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة:

ينتج من المعادلات الكلاسيكية، التكاملية-التفاضلية (3.57) وعن العلاقات (3.56) و(3.53) و العلاقات $(3.30)_2$ ، أن الحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^{0},\boldsymbol{\varphi}^{0},\theta^{0},\boldsymbol{\sigma}^{0},\boldsymbol{\mu}^{0},\boldsymbol{\varepsilon}^{0},\boldsymbol{\kappa}^{0})$ ، تحقق المعادلات التالية:

1. المعادلة التالية في $\Omega\times T$:

$$\overset{*}{\square}_{2}\in_{\alpha\beta}[g_{\beta}\,t+f_{\beta}+\rho^{-1}(t*R^{0}_{\beta})]_{,\alpha}+\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=0\ , \tag{3.58}$$

2. المعادلة التالية في $\Omega\times T^{+}$:

$$J^{-1}\overset{*}{\square}_{2}\hat{R}^{0}_{3}+\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}_{4}\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_{2}\in_{\alpha\beta}\rho^{-1}R^{0}_{\beta,\alpha} \tag{3.59}$$

حيث: $\hat{R}^{0}_{3}=\mu^{0}_{\beta 3,\beta}$ ،

3. المعادلة التالية في $\Omega\times T^{+}$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_{2}\,\rho^{-1}(R^{0}_{\alpha,\beta}-R^{0}_{\beta,\alpha})\ -\ \overset{*}{\square}_{2}\in_{\beta\alpha}J^{-1}\hat{R}^{0}_{3}=\\&\qquad\qquad\frac{1}{2}J^{-1}\in_{\beta\alpha}\overset{*}{\square}_{4}\in_{\gamma\varepsilon}X_{\varepsilon,\gamma}\end{aligned} \tag{3.60}$$

4. المعادلة التالية في $\Omega\times T^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_{2}(c^{2}_{4}R^{0}_{3,\alpha}-\ddot{\mu}^{0}_{\alpha 3})+\frac{1}{2}c^{2}_{4}\overset{*}{\square}_{4}\in_{\gamma\varepsilon}X_{\varepsilon,\gamma\alpha}=\ 0 \tag{3.61}$$

البرهان:

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

1. باستبدال كل α بـ β وكل β بـ γ في المعادلة $(3.57)_1$، من ثم باشتقاق طرفي المعادلة الناتجة، جزئياً بالنسبة لـ x_γ، نحصل بعد الاختصار والتبسيط مباشرةً على المعادلة (3.58)،
2. في المعادلة (3.58)، باستبدال كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم باشتقاق المعادلة الناتجة جزئياً بالنسبة لـ x_γ، وبالاستفادة من(3.56)، نحصل مباشرةً على:

$$2\overset{*}{\square}_2 \kappa_{\alpha 3} + \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma\alpha} = 0 , \tag{3.62}$$

الآن، بتعويض العلاقة (3.53)، نحصل على المعادلة:

$$\overset{*}{\square}_2 \mu^0_{\alpha 3} + \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon) \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma} = 0 , \tag{3.63}$$

وباشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة لـ x_α، من ثم بالاستفادة مرةً أخرى من المعادلة (3.58)، نحصل على المعادلة المطلوبة (3.59)،

3. في (3.59) نستبدل كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم نضرب طرفي العلاقة الناتجة بـ $\in_{\beta\alpha}$، ومن ثم نستفيد من العلاقة $(3.30)_2$، فنحصل مباشرة على العلاقة المطلوبة (3.60)،
4. في (3.59) أيضاً، نستبدل كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم نشتق المعادلة الناتجة بالنسبة لـ x_α، فنجد:

$$J^{-1}\overset{*}{\square}_2 \hat{R}^0_{3,\alpha} + \frac{1}{2} J^{-1}\overset{*}{\square}_4 \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_2 \in_{\gamma\varepsilon} \rho^{-1} R^0_{\varepsilon,\gamma\alpha} \tag{3.64}$$

الآن، باستخدام العلاقتين (3.56) و(3.53)، نحصل من المعادلة (3.64)،على المعادلة المطلوبة (3.61).

-B ***مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة (الزائدة):*** $(\mathbf{u}',\varphi',\theta',\sigma',\mu',\gamma',\kappa')$:

من أجل الحصول على معادلات Ignaczak للحركة بلغة الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha 3}$ وحقل درجات الحرارة المتمم θ'، نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (3.12) (بعد كتابتها بالشكل (3.43)) ، وعلى طرفي المعادلة (3.12) ، فنحصل على المعادلتين التاليتين (المحققتين في $\Omega\times T^+$):

$$\overset{*}{\square}_2 \{\zeta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\alpha,\beta} - R_{\beta,\alpha}) + \\ + J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_3\} = 0 , \tag{3.65}$$

$$\overset{*}{\square}_2 (c_4^2 R_{3,\alpha} - \ddot{\mu}_{\alpha 3}) = 0 , \tag{3.66}$$

ولنلاحظ الآن، أنه: أولاً: المعادلة (3.65) بمساعدة المعادلتين (3.45) و(3.60) ، ثانياً: المعادلة (3.66) بمساعدة المعادلة (3.61)، ثالثاً: المعادلة (3.14)، تعطينا جميعا:

معادلات Ignaczak للحركة بلغة الإجهادات المتممة والحرارة المتممة، والمحققة في $\Omega\times T^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 \rho^{-1} R'_{\alpha,\beta} + J^{-1} \in_{\alpha\beta} \mathfrak{R}'_3 - \overset{*}{\square}_2 \{ \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\beta\alpha)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\beta\alpha]} \\ - \frac{1}{2\mu}(\lambda \ddot{e}'_1 - \nu_T \ddot{\theta}')\delta_{\alpha\beta}\} = 0 , \tag{3.67}$$

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$c_4^2\,\mathfrak{R}'_{3,\alpha}-\overset{*}{\square}_2\,\ddot{\mu}'_{\alpha 3}=0\,, \tag{3.68}$$

$$\mathrm{D}\,\theta'-\eta_0\,\dot{e}'_1=-\frac{\hat{Q}}{\kappa}\,, \tag{3.69}$$

حيث: $R'_\alpha=\hat{R}'_\alpha+\hat{X}_\alpha\,,\ \hat{R}'_\alpha=\sigma'_{\beta\alpha,\beta}\,,\ \hat{X}_\alpha\equiv 0\,,$

و $\mathfrak{R}'_3=\hat{\mathfrak{R}}'_3+\hat{Y}_3\,,\ \hat{\mathfrak{R}}'_3=\overset{*}{\square}_2\,\hat{R}'_3\,,\ \hat{R}'_3=\in_{\alpha\beta}\sigma'_{\alpha\beta}+\mu'_{\beta 3,\beta}$

و $\hat{Y}_3=\overset{*}{\square}_2\,Y_3-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}\,,\quad \hat{Q}=0$

أما: $\dot{e}'_1=\frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\dot{\sigma}'_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_T\,\dot{\theta}')\,,\ \ddot{e}'_1=\frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\ddot{\sigma}'_{\varepsilon\varepsilon}+2\nu_T\,\ddot{\theta}')$ ،

من الشروط الحدية (3.15) ، نحصل على:

الشروط الحدية، المتممة، والمحققة على $\partial\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\sigma'_{\beta\alpha}n_\beta=0\,,\quad \mu'_{\alpha 3}n_\alpha=m_3-m_3^0\,,\quad \theta'=0 \tag{3.70}$$

حيث أن: $m_3^0=\mu_{\alpha 3}^0 n_\alpha$ ، والتي فيها تنتج $\mu_{\alpha 3}^0$ عن العلاقة (3.56) وعن العلاقة التأسيسية الكلاسيكية (3.53)،

ومن الشروط الابتدائية (3.22) -(3.16)، نحصل على:

الشروط الابتدائية، المتممة، التالية لأجل الحقول المتممة $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\theta')$ (في $\Omega\times\{0\}$):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}'=\operatorname{skew}\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\,,\quad \boldsymbol{\mu}'=\boldsymbol{\mu}^{(0)}-\boldsymbol{\mu}^{0\,(0)}\,,\ \theta'=0\,,\\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}}'=\operatorname{skew}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\,,\quad \dot{\boldsymbol{\mu}}'=\dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}-\dot{\boldsymbol{\mu}}^{0\,(0)}\,,\end{aligned} \tag{3.71}$$

حيث الرمز skew يدل على الجزء التناظري العكسي؛ $\operatorname{skew}\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=A_{[i\,j]}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$؛ بالتالي تأخذ الشروط الإبتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned}&\sigma'_{\alpha\beta}=\sigma^{(0)}_{[\alpha\beta]}\,,\ \sigma'_{33}=0\,,\quad \theta'=0\,,\\ &\mu'_{\alpha 3}=\mu^{(0)}_{\alpha 3}-\mu^{0\,(0)}_{\alpha 3}\,,\ \mu'_{3\alpha}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}[\mu^{(0)}_{\alpha 3}-\mu^{0\,(0)}_{\alpha 3}]\,,\\ &\dot{\sigma}'_{\alpha\beta}=\dot{\sigma}^{(0)}_{[\alpha\beta]}\,,\ \dot{\sigma}'_{33}=0\,,\ \dot{\mu}'_{\alpha 3}=\dot{\mu}^{(0)}_{\alpha 3}-\dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3}\,,\\ &\dot{\mu}'_{3\alpha}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}[\dot{\mu}^{(0)}_{\alpha 3}-\dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3}]\,,\end{aligned} \tag{3.72}$$

علماً أن:

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

$$\sigma_{[\alpha\beta]}^{(0)} = -2\alpha\,[\,\omega_{\alpha\beta}^{(0)} + \in_{\alpha\beta} f_3\,]\ ,$$
$$\omega_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}(f_{\alpha,\beta} - f_{\beta,\alpha})\ , \tag{3.73}$$

وتنتج $\mu_{\alpha 3}^{0\,(0)}$ ، عن وضع $t=0$ ، في عبارة الانفعالات الكلاسيكية $\mu_{\alpha 3}^{0}$ ، الناتجة عن دمج العلاقتين (3.56) و(3.53) ، حيث ينتج لدينا:

$$\mu_{\alpha 3}^{0\,(0)} = \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon) \in_{\gamma\varepsilon} f_{\varepsilon,\gamma\alpha} \tag{3.74}$$

كما أن:

$$\dot{\sigma}_{[\alpha\beta]}^{(0)} = -2\alpha\,[\,\dot{\omega}_{\alpha\beta}^{(0)} + \in_{\alpha\beta} g_3\,]\ ,$$
$$\dot{\omega}_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}(g_{\alpha,\beta} - g_{\beta,\alpha})\ , \tag{3.75}$$

وتنتج $\dot{\mu}_{\alpha 3}^{0\,(0)}$ ، عن وضع $t=0$ في عبارة المشتقات الجزئية الزمنية للانفعالات الكلاسيكية: $\dot{\mu}_{\alpha 3}^{0}$ ، والناتجة بدورها عن دمج المشتقات الجزئية الزمنية للعلاقتين (3.56) و(3.53) ، فينتج:

$$\dot{\mu}_{\alpha 3}^{0\,(0)} = \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon) \in_{\gamma\varepsilon} g_{\varepsilon,\gamma\alpha} \tag{3.76}$$

الآن من العلاقات التأسيسية (3.23) ، نحصل على:

العلاقات التأسيسية العكسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2\mu}(\,\lambda\, e'_1 - \nu_T\,\theta'\,)\,\delta_{\alpha\beta}\ ,$$
$$\kappa'_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu'_{\alpha 3}\ ,\quad e'_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)}(\sigma'_{\varepsilon\varepsilon} + 2\nu_T\,\theta')\ , \tag{3.77}$$

أخيراً ، من العلاقات (3.24) و(3.25) و(3.55) نحصل على:

العلاقات التي الإزاحات والدورانات، المتممة بدلالة الإجهادات المتممة ، والمحققة في $\bar{\Omega} \times T$:

$$u'_\alpha = \rho^{-1}(\,t * R'_\alpha\,)\ , \tag{3.78}$$

$$\varphi'_3 = (g_3 - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} g_{\beta,\alpha}) + (f_3 - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} f_{\beta,\alpha}) +$$
$$+ J^{-1}[\,t*(\hat{R}'_3 + Y_3)] + J^{-1}(\,t*\hat{R}_3^0) - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}\rho^{-1}(\,t*R_{\beta,\alpha}^0\,) \tag{3.79}$$

بحل مسألة الوصف الإجهادي- الحراري، الكلاسيكي(3.56)- (3.45) ، نحصل على الحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\theta^0,\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\kappa}^0)$. بعدها بحل مسألة الوصف الإجهادي – الحراري، المتمم (3.79)- (3.67) ، نحصل على الحقول الفيزيائية المتممة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\theta',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$. أخيراً ، بالتعويض في العلاقات (3.26)، نحصل على الحل $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\theta,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$ ، لمسألة الوصف الإجهادي- الحراري، الأصلية (3.62) - (3.49).

5. الخلاصة والنتائج (Conclusion and Results):

من خلال الدراسة السابقة وجدنا أنه لأجل الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب:(E-N:5) 2D الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، قمنا بتعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة الوصف التقليدي العام لهذا الجسم، و تعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة وصف Ignaczak لهذا الجسم (E-N:5) 2D.

الأمر الذي يعطي طريقة تحليلية جديدة لحل معادلات Ignaczak التنسورية بالإجهادات والحرارة، والتي تحكم الجسم (E-N:5) 2D ، وهذه الدراسة تملك أهمية كبيرة في نظرية الصفائح ومقاومة المواد.

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023

Conclusion

In paper, for the 2D (E-N:5) considerable body, we generalize the Schaefer vector method to: I) The Traditional Description of the 2D (E-N:5) considerable body,
II) The Ignaczak Description of the 2D (E-N:5) considerable body.
Our paper supply us with new analytical method for solving 2D-initial-boundary value problem of Ignaczak type of the 2D (E-N:5) elastic solid, which has important applications for example in composite theory and material resistance.

References

[1] Al-Hasan M., Dyszlewicz J. Coupled , Dynamic Micropolar Problems of Thermoelasticity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht,2014
[2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y. - Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht. 2013
[3] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742. 2011
[4]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford University Press Inc., New York. 2010
[5]- Dyszlewicz , J, Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer . 2004
[6]–Dyszlewicz , J , Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity, Journal of Thermal Stresesses,19,1996
[7] –Nowacki, W , Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN, 1986
[8] – Eringen , A . C , Linear theory of micropolar elasticity, J.Math , 1966
[9] - Ignaczak , J Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters-Noordhoff Groningen , 1971
[10] – Debnath, L& Bhatta , D , Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida , 2007.

Doi: https://doi.org/10.54216/PAMDA.020103
Received: August 19, 2022 Accepted: February 23, 2023